

10. 流体运动学

10.1 某一流动的拉格朗日描述是

$$\begin{cases} x = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cos(\omega t + \arctan \frac{y_0}{x_0}), \\ y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \sin(\omega t + \arctan \frac{y_0}{x_0}). \end{cases}$$

试改用欧拉方式描述的速度场。

10.2 已知如下的速度场。试描绘流线；计算张变速率、切变速率和转动角速度；如是无旋流动，求出速度势；判断流体是可压缩的还是不可压缩的。

- (i) $v_x = \frac{kx}{x^2 + y^2}, v_y = \frac{ky}{x^2 + y^2}, v_z = 0$ (k 是常数)；
- (ii) $v_x = -\frac{ky}{x^2 + y^2}, v_y = \frac{kx}{x^2 + y^2}, v_z = 0$ (k 是常数)；
- (iii) $v_x = \frac{-2xyz}{x^2 + y^2}, v_y = \frac{(x^2 - y^2)z}{x^2 + y^2}, v_z = \frac{y}{x^2 + y^2}$ ；
- (iv) $v_x = -A + B \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{ky}{x^2 + y^2}, v_y = B \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{kx}{x^2 + y^2}, v_z = 0$. (k, A, B 是常数)；
- (v) $v_\rho = ka\rho^n e^{-k(n+1)\varphi}, v_\varphi = a\rho^n e^{-k(n+1)\varphi}, v_z = 0$ (k 和 a 是常数)。

10.3 已知速度势为

- (i) $ax(x^2 - 3y^2)$ (常数 $a > 0$)，

- (ii) $-\frac{1}{2\pi}c\varphi$ (φ 是极坐标中的极角， c 是常数)，

试求速度场和流线。

10.4 已知速度势为复变函数 $f(z) = A \ln(z - \frac{1}{z})$ ，其中常数 $A > 0$ ，试求速度场和流线。

11. 流体动力学

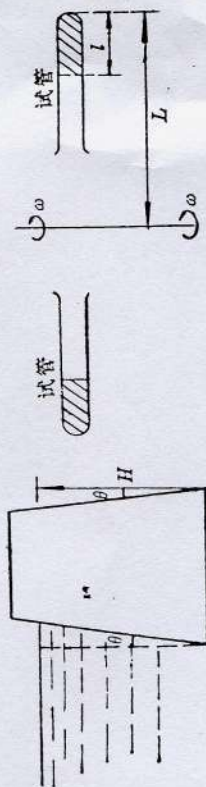
11.1 在静止流体中没有切应力。试根据这条件从(32.4)导出(37.2)。在无粘滞流体中没有切应力。试根据这条件从(33.1)导出(39.1)。

11.2 小车上有一敞口水柜，水柜沿小车行进方向的长度为 L 。当小车静止时，水面在水柜的敞口下方 h 处。

今使小车以匀加速 a_0 前进，试求水柜中水面形状。为免水从敞口溢出， a_0 不得超过怎样的数值？并求水中的压强分布。

题 11.2

11.3 马德堡半球是半球形壳，两个这种壳密合在一起构成空心球壳。现将球壳中的空气尽行抽出，问需用多大的力才能够把这两个壳分开？已知球的半径为 R ，球外的大气压为 p_0 。



题 11.4

11.4 水坝为什么上窄下宽？图示的水坝每米坝长所受水的压力为多大？此压力对底边的力矩多大？

题 11.5

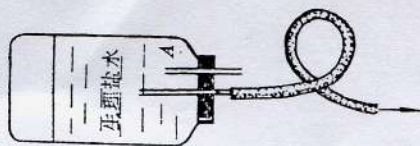
11.5 离心机高速旋转时，试管几乎是水平的，设试管内所盛液体的深度为 l ，液体密度为 ρ 。试管底与转轴距离为 L 。求试管底的压强。

11.6 气压公式(37.10)的推导中假定了气体温度均匀。试将这一假定改为 $p = C\rho^n$ (C 和 n 是常数， n 叫作多方指数)，从而推导修订的气压公式。

11.7 圆柱形光滑玻璃杯，直径为 D 。杯中有一匀质棒，棒长 $l (> D)$ ，密度为 $\rho (< \text{水的密度 } \rho_0)$ 。注水入杯，使水深为 h 。求棒对杯的压力。

11.8 风正对一堵墙吹来，风速 20 米/秒。设风吹到墙上并不弹回，求风对墙的压强。(空气密度 1.3 千克/米³)。

11.9 图示静脉点滴注生理盐水时使滴注速率保持一



题 11.9

$$\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = n \nabla^2 s + (n + \lambda) \nabla \Theta. \quad (33.8)$$

取 (33.8) 各项的散度, 即得

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \cdot s) = n \nabla^2 (\nabla \cdot s) + (n + \lambda) \nabla^2 \Theta.$$

由于 $\nabla \cdot s = \Theta$, 上式亦即

$$\rho \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = (2n + \lambda) \nabla^2 \Theta. \quad (33.9)$$

这正是波动方程, 波速

$$u = \sqrt{\frac{2n + \lambda}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1 - \sigma)}{\rho(1 + \sigma)}} Y. \quad (33.10)$$

这里所说的波动是膨胀系数 Θ 的传播过程, 所以称为膨胀波. 膨胀系数的变化即密度的变化, 这种波动是纵波.

取 (33.8) 各项的旋度, 即得

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \times s) = n \nabla^2 (\nabla \times s) + (n + \lambda) \nabla \times \nabla \Theta.$$

由于 $\nabla \times \nabla \Theta = 0$, 上式亦即

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = n \nabla^2 \varphi, \quad (33.11)$$

其中 $\varphi = \nabla \times s$. 这也是波动方程, 波速

$$u = \sqrt{\frac{n}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{2\rho(1 + \sigma)}} Y. \quad (33.12)$$

这里所说的波动是 $\nabla \times s$ 的传播过程, 所以称为扭曲波. 它是一种横波.

第八章 流体运动学

§ 34. 流体运动学的特点

弹性体有保持一定形状和大小的趋势. 施加外力使弹性体变形, 弹性体就加以抵抗, 这抵抗体现于弹性体中的胁强. 随着形变的生长, 弹性体的抵抗越来越强, 使得弹性体的形变总是有限度的, 不会无限增长.

流体并没有一定的形状, 对切变并不抵抗, 所以切变可以持续增长, 这就是流动. 流体既然具有这样的特点, 流体运动学即关于流体运动的描述当然要适应这个特点.

(1) 着重研究速度场

在 § 30 中, 用位移函数 $s(r)$ 来描写弹性体偏离其本来形状的改变, 这里的连续变数 r 是弹性体中各个质点本来位置的矢径, s 则是各个质点离开其本来位置的位移. 对于流体, 这种描写是用不上的. 流体根本没有什么“本来形状”, 也就谈不上什么“偏离‘本来形状’的形变”, 上述 r 和 s 完全没有意义.

流体可以流动, 这就需要研究如何描写流体的流动情况. 人们很自然想到用流体中各个质点的速度 $v(r_0, t)$ 来描写流动, 这里各个质点之间以它们在某个所谓“初始”时刻的矢径 r_0 相区分. 这是流体运动学中的拉格朗日描写方式.

但是, 追踪流动着的流体中的这个质点或那个质点是很麻烦的. 实际上, 通常也并不很关心流体中这个质点或那个质点的“命运”, 人们关心的往往是空间中各个地点的流速分布即速度场

$v(r, t)$, 这里 r 是空间中各个地点的矢径, 这就是流体运动学中的欧勒描写方式.

如果速度场不随时间而变, 这种流动就称为稳恒流动(或定常流动).

(2) 迹线与流线

为描写流体的流动情况, 还可以采用描画图线的方法.

在拉格朗日方式中, 描画的是流体中各个质点的运动轨迹, 这叫做迹线. 迹线的微分方程是

$$\frac{dr}{dt} = v(r_0, t). \quad (34.1)$$

按欧勒方式描画的曲线上, 每一点的切线都是沿着该处的流速, 这叫做流线. 流线的微分方程是 $dr \parallel v(r, t)$, 即

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}. \quad (34.2)$$

某一时刻的流线图描画出该时刻的流动情况, 可说是该时刻的速度场的“照片”. 前后相继各时刻的流线图, 则给出速度场的“电影”.

在每一时刻的速度场中, 除源点和汇点外, 每一点的流速方向是唯一的, 因而流线不会相交. 至于说到源点和汇点, 流线从源点向各方发散, 又从各方向汇点会聚(图56), 也互不相交.

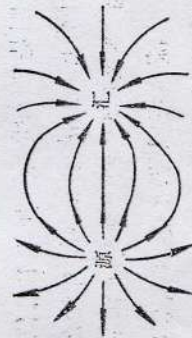


图 56

例 1 已知流体的速度场 $v = cxi$, 即 $v_x = cy, v_y = 0, v_z = 0$. 试画出这速度场中的流线.

解 按照 (34.2), 流线的微分方程是

$$\frac{dx}{cy} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{0}.$$

这是两个方程:

$$c y d y = 0, \quad c y d z = 0.$$

由此解得流线

$$y = \text{常数}, \quad z = \text{常数}.$$

这是平行于 x 轴的直线族(图 57). 其实, 本例的 $v = cxi$ 只有 x 分量, 完全可以不经计算就直接画出图 57 的流线. [图 57 上小转轮的作用详见后 § 35(2)]

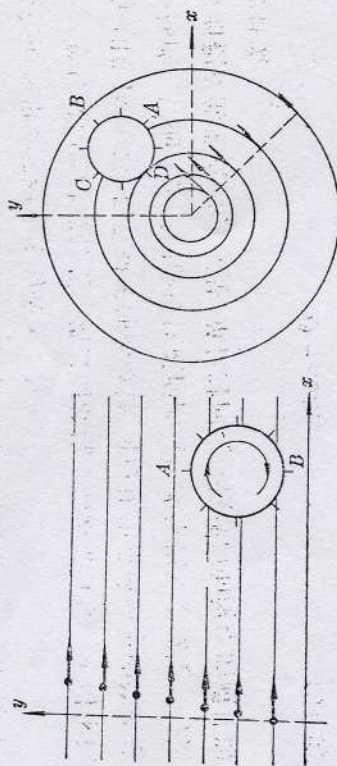


图 57

例 2 已知流体的速度场 $v = -icy/(x^2 + y^2) + jcx/(x^2 + y^2)$. 试画出这速度场中的流线.

解 按照 (34.2), 流线的微分方程是

$$\frac{dx}{-cy/(x^2 + y^2)} = \frac{dy}{cx/(x^2 + y^2)} = \frac{dz}{0}.$$

这是两个方程:

$$\frac{cx dx}{x^2 + y^2} = -\frac{cy dy}{x^2 + y^2}, \quad dz = 0.$$

由此解得

$$x^2 + y^2 = \text{常数}, \quad z = \text{常数}.$$

这是垂直于 z 轴的平面上的同心圆族(图 58).

任意划一闭合曲线, 通过闭合曲线上每一点作出流线(图 59). 这些流线形成管状曲面, 叫作流管. 流线不相交, 即流体中质点的流速不会与流管的“壁”相交. 换句话说, 流体的质点不可能穿过流



图 59

管的“壁”，管内的质点始终在管内，管外的质点始终在管外，这样，流管的作用竟然跟实体的管子一样！

单位时间通过流管某一横截面的流体的质量（也有采用体积的）叫作该处的流量。对于细的流管，可以认为横截面上的流速是一样的，因而单位时间流过该截面的流体的体积等于流速 v 与横截面积 S 的乘积 vS 。于是，单位时间流过该截面的流体的质量即流量为

$$Q = \rho v S, \quad (34.3)$$

这里的 ρ 是流体的密度。

对于稳恒流动，流线图不随时间而变。流体中的各个质点分别沿着一条不随时间而变的流线移动，因而流线也就是质点的轨迹。这样，稳恒流动的流线与迹线重合。

截取一段流管。在稳恒流动的情况下，这段流管中的流体质量必定是不变的。这就是说，从上游进入这段流管的流量 Q_1 ，必定等于离开这段流管到下游去的流量 Q_2 ，即

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2, \quad (34.4)$$

下标 1 和 2 分别对应于这段流管的两端。这叫作连续性方程。其实，确切地说，应叫作稳恒流动流管中的连续性方程。至于一般情况下的连续性方程见 (35.26) 或 (35.27)。

(3) 当地变化率与实体变化率

加速度是一个重要的力学量。现在研究加速度的计算。

在拉格朗日方式中，流体的运动是用各个质点的速度 $v(r, t)$ 来描写的，各个质点以它们的“初始”矢径相区分。加速度的计算很容易，它是 $v(r, t)$ 的时间变化率，

$$a(r, t) = \frac{dv(r, t)}{dt} = \frac{\partial v(r, t)}{\partial t}. \quad (34.5)$$

在欧勒方式中，流体的运动是用速度场 $v(r, t)$ 来描写的，事情要复杂一些。如果只注意速度场 $v(r, t)$ 对时间的直接依赖关系，则速度场的时间变化率是

$$\frac{\partial v(r, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(r, t + \Delta t) - v(r, t)}{\Delta t}. \quad (34.6)$$

这里比较的是在两个无限靠近的瞬时 t 和 $t + \Delta t$ 流经同一地点 r 的流速。不同瞬时流经同一地点的显然不会是同一个质点，不同质点的速度的比较当然不是加速度，因为加速度是同一质点的速度的时间变化率。同一质点在不同的瞬时显然经过不同的地点 $r(t)$ ，因此，对同一质点而言， $v(r, t)$ 应理解为 $v[r(t), t]$ ，即 v 不仅直接依赖于 t ，而且肯定还通过 $r(t)$ 的变化而依赖于 t ，于是，加速度

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v_x, \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v_y, \\ \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v_z. \end{cases} \quad (34.7)$$

这三个式子可以合并为矢量式

$$a = \frac{dv[r(t), t]}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v. \quad (34.8)$$

这样，速度 $v(r, t)$ 有两种时间变化率。(34.6) 的 $\partial v / \partial t$ 是速度场 $v(r, t)$ 中一定地点的流速的时间变化率，我们把这叫作速度

的当地变化率。加速度(34.8)则是一定质点的速度 $\mathbf{v}(r, t)$ 的时间变化率, 我们把这叫作速度的实体变化率。两者的差 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ 则是由于质点的位置漂移(运流)而导致的变率, 叫作漂移变化率(或运流变化率)。

试以稳恒流动为例。稳恒流动的速度场 $\mathbf{v}$ 不随时间而变, 当地变化率 $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ 。但是, 作为实体变化率的加速度却未必是零。参看图 59 的流线, 在稳恒流动的情况下, 流线也就是迹线, 各个质点分别沿着一定的流线运动。图中的流线是曲线, 这表明质点的速度指向随时间而变。从连续性方程(34.4)又知道, 质点流经流管较窄处(S 较小)的流速较大, 而流经流管较宽处的流速较小。质点的速度大, 既然质点的速度指向和大小都处于变化之中, 它的加速度不为零。

当地变化率与实体变化率的区别并非速度所特有的。对于任一力学量, 实体变化率总是等于当地变化率与漂移变化率之和,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (34.9)$$

§ 35. 速度场的分析

(1) 速度场的一般分析

仿照 § 30 对弹性体中应变的分析, 这里对流体的速度场也进行一般的分析。

在速度场中取定某个 O 点, 其矢径为 $\mathbf{r}$ 。我们要考察点 O 邻近的流速分布。为此, 在点 O 附近取点 P 作为代表加以考察, 点 P 的矢径为 $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ 。因为点 P 在 O 的邻近, 可把流速函数 $\mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$ 展为泰勒级数, 并只保留一阶项而把二阶及二阶以上各项略去。这可用分量形式写为:

$$\begin{cases} v_x(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = v_x(\mathbf{r}) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_0 dz, \\ v_y(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = v_y(\mathbf{r}) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_0 dz, \\ v_z(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = v_z(\mathbf{r}) + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_0 dz, \end{cases} \quad (35.1)$$

记号 $(\quad)_0$ 表示偏导数取其在 O 点的值。这三式右边第一项描写的是这个小范围中流体的整体平动, 把这项移到左边, 方程(35.1)成为

$$\begin{cases} dv_x = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_0 dz, \\ dv_y = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_0 dz, \\ dv_z = \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_0 dz. \end{cases} \quad (35.2)$$

先看 (35.2) 的对角项, 即右边“对角线”上的那几项, 例如 $(\partial v_x / \partial x)_0 dx$ 。如果把 Δx 当作沿 x 方向的一小段流体柱的长度, 则 $\Delta v_x = v_x(x + \Delta x) - v_x(x)$ 是这一段流体柱的伸长速率, 从而

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v_x(x + \Delta x) - v_x(x)}{\Delta x}$$

是沿 x 方向的张应变速率 $\dot{\epsilon}_{11}$,

$$\dot{\epsilon}_{11} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0. \quad (35.3)$$

同理, $(\partial v_y / \partial y)_0$ 和 $(\partial v_z / \partial z)_0$ 分别是沿 y 方向和 z 方向的张应变速率 $\dot{\epsilon}_{22}$ 和 $\dot{\epsilon}_{33}$,

$$\dot{\epsilon}_{22} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_0, \quad \dot{\epsilon}_{33} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_0. \quad (35.3)$$

再看 (35.2) 的非对角项, 例如 $(\partial v_x / \partial y)_0 dy$ 。如果把 Δy 当作

垂直于 y 方向的流体薄层的厚度, 则 $\Delta v_x = v_x(y + \Delta y) - v_x(y)$ 是这薄层两面的 x 方向速度之差, 从而

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0 = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v_x(y + \Delta y) - v_x(y)}{\Delta y}$$

是切应变速率。

正如 § 30 图 53 所示, 切变的某些组合中可能有转动。为了把转动分离出来, 应把 (35.2) 的所有的项分别拆为“对称部分”与“反对称部分”, 即

$$\begin{cases} dv_x = dv_x^{(s)} + dv_x^{(k)}, \\ dv_y = dv_y^{(s)} + dv_y^{(k)}, \\ dv_z = dv_z^{(s)} + dv_z^{(k)}, \end{cases} \quad (35.4)$$

其中

$$\begin{cases} dv_x^{(s)} = \dot{e}_{11} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz, \\ dv_y^{(s)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx + \dot{e}_{22} dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) dz, \\ dv_z^{(s)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dy + \dot{e}_{33} dz, \\ dv_x^{(k)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz, \\ dv_y^{(k)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dz, \\ dv_z^{(k)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) dy. \end{cases}$$

为了书写简洁, 引入记号

$$\begin{cases} \dot{e}_{12} = \dot{e}_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_0, \\ \dot{e}_{13} = \dot{e}_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_0, \\ \dot{e}_{23} = \dot{e}_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)_0, \end{cases} \quad (35.5)$$

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)_0 = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{v})_x, \\ \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_0 = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{v})_y, \\ \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0 = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{v})_z, \end{cases} \quad (35.6)$$

就可把“对称部分”与“反对称部分”分别表为

$$\begin{cases} dv_x^{(s)} = \dot{e}_{11} dx + \dot{e}_{12} dy + \dot{e}_{13} dz, \\ dv_y^{(s)} = \dot{e}_{21} dx + \dot{e}_{22} dy + \dot{e}_{23} dz, \\ dv_z^{(s)} = \dot{e}_{31} dx + \dot{e}_{32} dy + \dot{e}_{33} dz, \end{cases} \quad (35.7)$$

$$\begin{cases} dv_x^{(k)} = -\omega_z dy + \omega_y dz, \\ dv_y^{(k)} = +\omega_z dx - \omega_x dz, \\ dv_z^{(k)} = -\omega_y dx + \omega_x dy. \end{cases} \quad (35.8)$$

方程 (35.8) 其实就是

$$d\mathbf{v}^{(k)} = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}. \quad (35.9)$$

这显然是整体的转动, 转动的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 由 (35.6) 给出, 即

$$\boldsymbol{\omega} = (1/2) \nabla \times \mathbf{v}.$$

方程 (35.5) 的 $\dot{e}_{12}$ 等显然是纯切变速率。

这样, 把 (35.4), (35.7) 以及 (35.8) 综合起来看, 在速度场中某个 O 点邻近的流速可归结为: 随 O 点平动的速度, 绕 O 点转动的速度, 与张应变的变化相应的速度, 以及与纯切变的变化相应的速度。

方程 (35.6) 给出了速度场 $\mathbf{v}$ 的旋度 $\nabla \times \mathbf{v}$ 的意义, 它是点 O

邻近部分的转动角速度 ω 的两倍。至于 ω 的散度 $\nabla \cdot \omega$ 也有鲜明的意义。事实上,由(35.3)知

$$\nabla \cdot \omega = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \dot{e}_{11} + \dot{e}_{22} + \dot{e}_{33} = \dot{\Theta}, \quad (35.10)$$

式中 Θ 是(30.18)的膨胀系数,

$$\Theta = e_{11} + e_{22} + e_{33}.$$

这就是说,速度场 ω 的散度 $\nabla \cdot \omega$ 正是膨胀速率。

不可压缩流体的膨胀系数恒为零,膨胀速率当然也为零。于是,(35.10)给出

$$\nabla \cdot \omega = 0 \quad (\text{不可压缩流体}). \quad (35.11)$$

例1 试分析§34例1的速度场 $\omega = c\hat{j}$ 。

解 按照(35.3), (35.5)和(35.6)计算张胁变速率、纯切变速率和转动角速度,

$$\dot{e}_{11} = \frac{\partial(cy)}{\partial x} = 0, \quad \dot{e}_{22} = 0, \quad \dot{e}_{33} = 0; \quad (1)$$

$$\dot{e}_{12} = \dot{e}_{21} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(cy)}{\partial y} + 0 \right] = \frac{1}{2}c, \quad \dot{e}_{13} = \dot{e}_{31} = 0, \quad \dot{e}_{23} = \dot{e}_{32} = 0; \quad (2)$$

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = -\frac{1}{2}c. \quad (3)$$

于是,

$$\begin{cases} dv_x^{(N)} = \frac{1}{2}cdy, \\ dv_y^{(N)} = \frac{1}{2}cdx, \\ dv_z^{(N)} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} dv_x^{(R)} = \frac{1}{2}cdy, \\ dv_y^{(R)} = -\frac{1}{2}cdx, \\ dv_z^{(R)} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

在本例中,流体中的张胁变速率 $\dot{e}_{11}, \dot{e}_{22}, \dot{e}_{33}$ 为零,膨胀速率 Θ 当然随着为零;垂直于 z 轴的平面上有纯切变速率 $\dot{e}_{12} = c/2$,垂直于 x 轴或 y 轴平面上的纯切变速率 $\dot{e}_{13}, \dot{e}_{23}$ 等为零;流动包含转动成分 ω_z ,转动轴平行于 z 轴,转向与 z 轴的负向按右手螺旋相联系,角速度大小为 $c/2$ 。

本例的流线见于图57,是平行直线族。单从流线族来看,很容易误解为没有转动,实际上是有转动的,如(3)所示。

例2 试分析§34例2的速度场 $\omega = -icy/(x^2+y^2) + jcx/(x^2+y^2)$ 。

解 按照(35.3), (35.5)和(35.6)计算张胁变速率、纯切变速率和转动角速度,

$$\dot{e}_{11} = \frac{2cxy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \dot{e}_{22} = \frac{-2cxy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \dot{e}_{33} = 0; \quad (1)$$

$$\dot{e}_{12} = \dot{e}_{21} = c \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \dot{e}_{13} = \dot{e}_{31} = 0, \quad \dot{e}_{23} = \dot{e}_{32} = 0; \quad (2)$$

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left[c \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} - c \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \right] = 0. \quad (3)$$

于是,

$$\begin{cases} dv_x^{(N)} = \frac{2cxydx + c(y^2 - x^2)dy}{(x^2+y^2)^2}, \\ dv_y^{(N)} = \frac{c(y^2 - x^2)dx - 2cxydy}{(x^2+y^2)^2}, \\ dv_z^{(N)} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} dv_x^{(R)} = 0, \\ dv_y^{(R)} = 0, \\ dv_z^{(R)} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

注意,以上计算只适用于原点以外的地方。这是因为,在原点($x=0, y=0$), $v_x = \infty, v_y = \infty$ 。

这样,在本例中,在原点以外的地方,沿 x 方向和 y 方向各有张胁变速率,两者符号相反;体胀速率 $\dot{e}_{11} + \dot{e}_{22} + \dot{e}_{33} = 0$;垂直于 z 轴的平面上有纯切变速率 $c(y^2 - x^2)/(x^2+y^2)^2$,垂直于 x 轴或 y 轴的平面上纯切变速率为零,而且流动不包含转动成分。

本例的流线见于图58,是同心圆族。单从流线族来看,很容易误解为处处包含转动成分。

(2) 有旋流动与无旋流动

流体在某处的流动,如果不含转动成分,即 $\omega = (1/2)\nabla \times \omega = 0$,我们就说流体在那里作无旋流动;如果含有转动成分, $\omega \neq 0$,则说流体在那里作有旋流动。

流动在某处是否有旋并不在于该处流线是否形成圈状。事实上,§34和本节例1的流动是处处有旋的($\omega_z = -c/2$),而流线却是平行直线族(图57),并不形成圈状。§34和本节例2的流动除原点处处无旋,而流线却是同心圆族(图58)。

图 57 的流线是平行直线族, 在图上看不出什么旋涡, 怎么会是有旋流动呢? 这个问题不难回答. 本节例 1 分析过, 这个速度场中的流动处处都包含平动和转动[见(4)的 $d\mathbf{v}^{(u)}$]以及纯切变随时间的变化[见(4)的 $d\mathbf{v}^{(u)}$]. 图 57 描画的是这三种运动的叠加的结果, 以致转动未能直接显示出来. 为了直接显示某处的转动, 应设法撇开该处的平动和纯切变随时间的变化, 这一点利用小转轮可以作到. 在图 57 中画有一个小转轮. 流体推动小转轮的叶片向右. 由于各处流速不等以及叶片与流速的角度不同, 各个叶片所受的推动也不相等. 图中 A 处的叶片所受推动最强, B 处的叶片所受推动最弱, 小转轮就作顺时针的转动. 这显示出流动含有转动成分.

图 58 的流线是同心圆族, 但如本节例 2 所分析的, 在原点以外却是处处无旋的. 这也可借助于小转轮来帮助理解. 在图 58 的 A 处和 C 处, 流速平行于叶片, 没有推动小转轮转动的作用. 在 ABC 段上, 流体推动叶片, 使转轮有逆时针转动的趋势; 在 ADC 段上, 流体推动叶片, 使转轮有顺时针转动的趋势. ABC 段较长而流速较小, ADC 段较短而流速较大, 两种趋势平衡, 故转轮不转动. 这样, 图 58 的流动除原点外处处无旋就不难理解了.

利用小转轮所作的定性说明可以改用较精密的语言表达出来. 这要用到环流量.

流速 $\mathbf{v}$ 沿闭合曲线 C 的曲线积分

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (35.12)$$

叫作该闭合曲线上的环流量. 按照矢量分析中的斯托克斯定理, 环流量(35.12)又可表为 C 所围曲面 S 上的曲面积分

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

将(35.6)代入上式,

$$\Gamma = \iint_S 2\omega \cdot d\mathbf{S}. \quad (35.13)$$

如着重研究某个小曲面 S , 则小曲面可当作小平面, 而且 ω 可当作在 S 上处处相同. 于是, (35.13) 成为

$$\Gamma = 2\omega \cdot \iint_S d\mathbf{S} = 2\omega \cdot \mathbf{S}, \quad (35.14)$$

式中矢量 $\mathbf{S}$ 沿着小曲面的法向, 其大小等于小曲面的面积. (35.14) 可以改写成

$$\omega_n = \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{S}. \quad (35.15)$$

这就是说, 小的闭合曲线上的环流量 Γ 除以该闭合曲线所围小平面的面积 S , 再除以 2, 就等于流体绕该平面的法线转动的角速度. 因此, 流动是无旋的还是无旋的就可根据环流量是否为零来判断. 小转轮不过是环流量的一个形象化的定性描述罢了.

例 3 例 2 关于速度场 $\mathbf{v} = -iy/(x^2+y^2) + jcx/(x^2+y^2)$ 的计算不适用于原点. 试判断该速度场在原点是否有旋. 如果有旋, 试求出角速度.

解 运用环流量来判断.

以原点为心作半径 ϵ 很小的圆周 C_ϵ . 我们要计算 C_ϵ 上的环流量 Γ_ϵ . 在圆周上任取一点 (x, y) , 则 x 和 y 必满足 $x^2+y^2=\epsilon^2$. 通过这一点的矢径是 $\mathbf{r} = ix + jy$, 通过这一点的法向单位矢量

$$\mathbf{n} = \frac{1}{r} \mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathbf{r} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{r} = i \frac{x}{\epsilon} + j \frac{y}{\epsilon}. \quad (1)$$

通过这一点的切向单位矢量 $\mathbf{t}$ 垂直于 $\mathbf{n}$, 因此是

$$\mathbf{t} = -i \frac{y}{\epsilon} + j \frac{x}{\epsilon}. \quad (2)$$

于是, 圆周 C_ϵ 上的环流量

$$\Gamma_\epsilon = \oint_{C_\epsilon} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_\epsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dr = \oint_{C_\epsilon} \left(-i \frac{cy}{\epsilon^2} + j \frac{cx}{\epsilon^2} \right) \cdot \left(-i \frac{y}{\epsilon} + j \frac{x}{\epsilon} \right) dr$$

$$= \oint_{C_0} \left(\frac{cy^2}{\epsilon^3} + \frac{cx^2}{\epsilon^3} \right) dr = \oint_{C_0} \frac{c}{\epsilon} dr = \frac{c}{\epsilon} 2\pi\epsilon = 2\pi c.$$

环流量 $\Gamma_c \neq 0$, 这说明速度场在原点是有旋的.

应用 (35.15), 在原点, 绕 z 轴的转动角速度

$$\omega_z = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\Gamma_c}{S_c} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{2\pi c}{\pi \epsilon^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{c}{\epsilon^2} = \infty.$$

这样, 例 2 的速度场是某种理想化的旋涡.

对于有旋流动, 可以作出一些曲线, 使它处处与当地的 ω 相切, 如图 60 和 61 的虚线. 这些曲线叫作涡索.

计算 ω 的散度,

$$\nabla \cdot \omega = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla \times v \right) = \frac{1}{2} \nabla \cdot \nabla \times v.$$

不难验证, 不管 v 是怎样的矢量场, $\nabla \cdot \nabla \times v$ 恒为零, 从而 $\nabla \cdot \omega$ 恒为零. 这就是说, 涡索没有源或汇, 它或则形成首尾相接的环, 如强烈鼓风所形成的烟环 (图 60), 或则终止于流体的边界, 如划桨时在水面上所形成的两种相反的旋涡 (图 61).

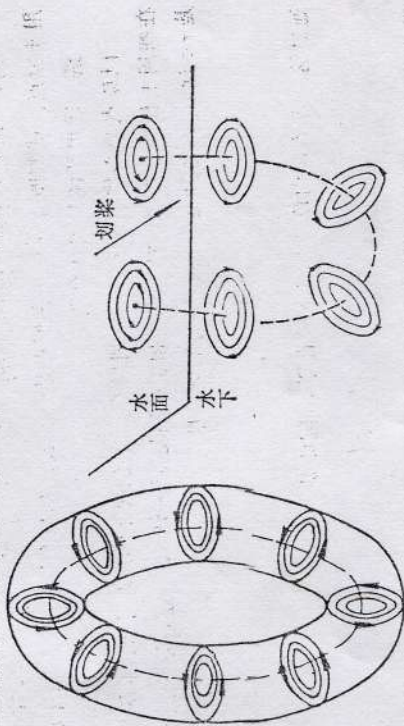


图 60

图 61

再说无旋流动. 无旋流动满足 $\nabla \times v = 0$. 从多元函数微积分与曲线积分理论知道, 条件 $\nabla \times v = 0$ 保证

$$v \cdot dr = v_x dx + v_y dy + v_z dz \quad (35.16)$$

为全微分, 亦即保证曲线积分

$$\int_{r_0}^r v \cdot dr = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} v_x dx + v_y dy + v_z dz \quad (35.17)$$

只取决于起点和终点, 而与中间路径无关. 取定某个始点 (x_0, y_0, z_0) , 则曲线积分 (35.17) 只取决于终点 (x, y, z) , 把曲线积分记作 $\varphi(x, y, z)$,

$$\varphi(x, y, z) = \int_{r_0}^r v \cdot dr = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} v_x dx + v_y dy + v_z dz, \quad (35.18)$$

则全微分 (35.16) 变为

$$d\varphi = v \cdot dr = v_x dx + v_y dy + v_z dz. \quad (35.19)$$

标量函数 $\varphi(x, y, z)$ 叫作无旋流动的速度势. (35.18) 就成为从无旋速度场 v 计算其速度势 φ 的公式. 以

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

代入 (35.19) 的左边, 然后两边比较, 即得

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (35.20)$$

或者合并为一个矢量式,

$$v = \nabla \varphi. \quad (35.21)$$

这是从无旋速度场的速度势 φ 计算速度场 v 的公式. 这样, 对于无旋流动, 速度场 v 和速度势 φ 两者只知其一, 就可算出另一个, 所以两者都可以用来描写流体的无旋流动. 但是, v 是矢量函数, φ 是标量函数, 用标量函数比用矢量函数当然要方便得多.

特别说说不可压缩流体的无旋流动. 按照 (35.11), 不可压缩流体的速度场 v 满足 $\nabla \cdot v = 0$; 而无旋流动的速度场 v 可用速度势 φ 表出. 于是, $\nabla \cdot \nabla \varphi = 0$, 这就是拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (35.22)$$

这样,只要知道了流体边界上的物理条件,不可压缩流体在该区域中的无旋流动就可作为拉普拉斯方程(35.21)的边界值问题来求解。关于拉普拉斯方程的边界值问题的求解,可参看数学物理偏微分方程方面的书籍。

再说一说不可压缩流体的二维无旋流动。所谓二维流动其实还是三维的,但是流速 v 只在 xy 平面上变化,而在垂直于 xy 平面的方向上并不变化,所以只要研究 xy 平面上的流速分布就够了。不可压缩流体的二维无旋流动的速度势 $\varphi(x, y)$ 满足二维的拉普拉斯方程,按照复变函数论,它必可作为复变数 $z = x + iy$ 的某个解析函数 $f(z)$ 的实部或虚部,

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (35.22)$$

速度势 φ 的共轭调和函数 $\psi(x, y)$ 叫作流函数。由解析函数的科希-里曼方程 $\partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x$ 容易得出

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,$$

即 $\nabla\varphi$ 与 $\nabla\psi$ 处处互相垂直。 $\nabla\psi$ 沿着曲线“ $\psi(x, y) = \text{常数}$ ”的法向,而 $\nabla\varphi$ 就是 v ,可见曲线“ $\psi(x, y) = \text{常数}$ ”处处与 v 相切。换句话说,“ $\psi(x, y) = \text{常数}$ ”代表流线。

流线“ $\psi(x, y) = \text{常数}$ ”里的常数本身也有鲜明的意义。参看图62. 设通过点 (x_1, y_1) 的流线是“ $\psi(x, y) = \psi_1$ ”,通过点 (x_2, y_2) 的流线是“ $\psi(x, y) = \psi_2$ ”。我们要计算这两条流线之间的流量(以体积计)

$$Q = \int_A^B v_n ds,$$

积分沿着任一路径进行,例如沿着图中的虚线进行。虚线的切向

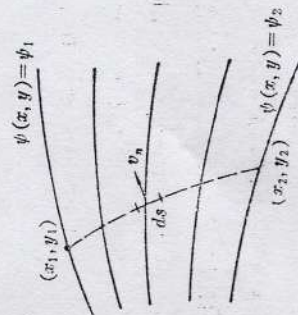


图 62

单位矢量 $t = i \cdot x/ds + j \cdot y/ds$, 从而垂直于它的法向单位矢量 $n = i \cdot dy/ds - j \cdot x/ds$. 于是,

$$v_n = v \cdot n = (\nabla\varphi) \cdot n = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dx}{ds}.$$

利用科希-里曼方程 $\partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x$, 可把上式改写为

$$v_n = \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{ds}.$$

这就可以算出流量

$$\begin{aligned} Q &= \int_A^B \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) ds = \int_A^B \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy \\ &= \int_A^B d\psi = \psi|_B - \psi|_A = \psi_2 - \psi_1. \end{aligned} \quad (35.23)$$

这样,在 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 两点之间的流量等于通过这两点的流线“ $\psi(x, y) = \psi_1$ ”与“ $\psi(x, y) = \psi_2$ ”中的常数 ψ_2 与 ψ_1 之差 $\psi_2 - \psi_1$.

(3) 连续性方程

方程(34.4)给出稳恒流动的流管中的连续性方程。这里要推导出一般情况下的连续性方程。

任取一个闭合曲面 S , 把它所围的体积记作 V . 体积 V 中的总质量 m 可用密度 ρ 的体积分表示,

$$m = \iiint_V \rho d\tau.$$

由于流体的流动,质量 m 将随时间而变。质量的变化率

$$\frac{dm}{dt} = \iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} d\tau \quad (35.24)$$

应等于通过 S 进入 V 的流量 Q .

现在计算 Q . 考虑到曲面 S 上各处流速 v 可能各不相同, v 与曲面的法向之间的夹角也可能各不相同, 应将 S 划分为许多小部

分. 将曲面 S 的小部分记作 $d\sigma$, 这矢量 $d\sigma$ 指向该小部分的外法向, 其大小 $d\sigma$ 则等于该小部分的面积. 这样, 通过该小部分流进 V 的流量为 $-\rho\mathbf{v}\cdot d\sigma$. 于是, 通过整个闭合曲面 S 流进 V 的流量

$$Q = -\oint_S \rho\mathbf{v}\cdot d\sigma.$$

按照矢量分析的高斯定理, 上式右边的闭合曲面积分又可表为 S 所围体积 V 上的体积分,

$$Q = -\iiint_V \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})d\tau. \quad (35.25)$$

(35.24) 应当与 (35.25) 相等,

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau = \iiint_V -\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})d\tau.$$

一般地说, 两个积分相等并不意味着被积函数相等. 但是, 上式并不是对特定的某个体积 V 成立, 而是对任意的体积 V 都成立, 这只能是因为被积函数相等. 这样, 就得到连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0. \quad (35.26)$$

把 $\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})$ 展开为 $\rho\nabla\cdot\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\rho$, 上式成为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0.$$

利用实体变化率与当地变化率的关系式 (34.9), 可把连续性方程改写为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \quad (35.27)$$

第九章 流体动力学

§ 36. 流体动力学的特点

流体没有什么“本来形状”, 对切变并不抵抗. 不仅流体运动学要适应流体的这个特点, 而且这个特点必然也在流体动力学中反映出来.

既然流体不反抗切变, 在流体中任一平面的两方之间就没有切向弹性力作用.

但是, 在运动着的流体中, 虽然没有切向弹性力, 却可能有另一种切向作用力: 流速不等的流层之间的摩擦力. 这种摩擦力当然是切向的. 流体内部的这种摩擦叫作内摩擦. 当然, 在各部分相对静止的流体中就不会有内摩擦力.

流体在运动中有内摩擦, 这个性质叫作粘滞性. 各种流体的粘滞性的大小相差十分悬殊. 如果流体的粘滞性很小, 或者在特定的问题中, 粘滞性并不起重要作用, 就不妨把实际的流体抽象为无粘滞流体.

在无粘滞流体中, 或者在虽有粘滞性但处于相对静止的流体中, 既没有切向弹性力, 也没有内摩擦力, 即在流体的任一平面两方之间没有切向作用力. 本章大部分讲述流体的平衡方程以及无粘滞流体的运动, 因而认为流体中没有切向作用力. 只是在最后一节 § 40 简略地讲述粘滞流体的运动, 在那一节是要考虑内摩擦力的.

在流体内给定一点 O , 通过该点的任一平面两方之间没有切向作用力, 这就是说, 只有张压强. 大家知道, 流体是不能拉伸的,

它不能经受张力,只能经受压力。

因此,流体中的张胁强总是指每单位面积两方的相互压力,这叫作压强。那么,压强 p 与平面取向的关系是怎样的呢?

这可以仿照 § 31 加以分析。

在给定点 O 的邻近划出小四面体

$OABC$ (图 63)。平面 ABC 的取

向由外法向的方向余弦 α, β, γ 表示,它的面积则记作 S 。

作用在平面 ABC, OBC, OCA 和 OAB 上的压强分别记作 p, p_1, p_2 和 p_3 。

把平面 OBC, OCA 和 OAB 的面积分别记作 S_1, S_2 和 S_3 。§ 31 已指出

$$S_1 = \alpha S, \quad S_2 = \beta S, \quad S_3 = \gamma S. \quad (36.1)$$

先研究小四面体在 x 方向所受力的平衡问题。作用在平面 OCA 和 OAB 上的压力分别是 y 方向和 z 方向的,这里不予考虑。作用在平面 ABC 上的压力沿着内法向,大小为 pS , 因而其 x 分量为 $- \alpha p S$ 。作用在平面 OBC 上的压力沿 x 向,其大小为 $p_1 S_1$ 。于是,得 x 方向的平衡方程 $- \alpha p S + p_1 S_1 = 0$, 即 $- \alpha p S + p_1 \alpha S = 0$, 亦即 $p_1 - p = 0$ 。

同理,由 y 方向和 z 方向的平衡方程可得类似结果,即

$$p = p_1, \quad p = p_2, \quad p = p_3. \quad (36.2)$$

这样,在流体中任一给定的点,压强 p 与方向无关。可见流体不同于弹性体,流体中任一给定点的内力无需用张胁量来描写,只要用与方向无关的压强 p 亦即标量 p 来描写就够了。

方程 (36.2) 的推导中略去了一切正比于体积的力, § 31 已指出,这样的忽略是正当的。此外,也像 § 31 所指出的那样,即使流

体并非处于平衡,方程 (36.2) 也成立。

§ 37. 流体静力学

(1) 流体的平衡方程

现在仿照 § 32 研究流体的平衡问题,着重的当然不是整体的平衡,而是流体内部各个小部分在内力(以压强为表征)和外力共同作用下的平衡。这里寻求的是流体在平衡时各处的压强之间的关系。

设想在流体内划出一个小长

方体,它的三棱分别平行于坐标轴,棱长分别是 dx, dy 和 dz 。

图 64 描画的是它在 xy 平面上的投影。

先考察 x 方向的平衡。在静止的流体中没有切胁强,所以平行六面体的六个面之中,只有法向沿着 x 方向的那一对平面上的作用力是沿 x 方向的,它们是一 $p(x+dx)dydz$ 和 $p(x)dydz$, 其合力为

$$- [p(x+dx) - p(x)] dydz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz. \quad (37.1)$$

虽然 $-p(x+dx)dydz$ 与 $p(x)dydz$ 都是二阶小量,它们的合力 (37.1) 却是三阶小量。正比于体积的体力也是三阶小量,因此在平衡方程中不可略去。将流体所受体力密度记作 $f(x, y, z)$, 则这个小平行六面体所受体力为 $f(x, y, z) dx dy dz$ 。于是,小平行六面体的平衡条件要求

$$\left(- \frac{\partial p}{\partial x} + f_x \right) dx dy dz = 0.$$

y 方向的平衡和 z 方向的平衡可同样加以考察。结果, 流体的平衡条件是

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + f_x = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} + f_y = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z = 0. \quad (37.2)$$

即

$$\mathbf{f} - \nabla p = 0. \quad (37.3)$$

平衡方程 (37.3) 把流体所受体力密度 $\mathbf{f}$ 表为一种梯度, 这就是说, 作用于流体的体力必须是势力, 流体才可能平衡。

(2) 静止液体的自由表面

流体的平衡条件 (37.3) 指出, 流体静压强 p 的梯度 ∇p 等于体力密度 $\mathbf{f}$ 。大家知道, 压强梯度 ∇p 垂直于等压面 " $p(x, y, z) = \text{常数}$ ". 这样, 在静止流体中, 等压面垂直于体力密度 $\mathbf{f}$ 。

静止液体的自由表面也是等压面。例如, 暴露于大气中的液体表面上各处的压强都等于大气压。静止液体的自由表面既然是等压面, 它必定处处垂直于体力密度 $\mathbf{f}$ 。这一点其实可以直接看出来: 假如 $\mathbf{f}$ 并不垂直于自由表面, 而具有切向分力, 则液体的表面层将作切向流动, 不再是静止的液体。

在通常情况下, 液体所受的体力仅仅是重力, 静止液体的自由表面处处垂直于重力。就小范围而言, 各处的重力是彼此平行的, 静水的自由表面是垂直于重力的平面, 叫作水平面。就大范围而言, 各处的重力并不平行, 它们相交于地心 (这里假定地球为完善

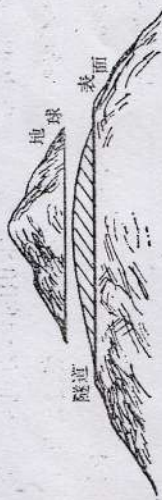


图 65

的球形, 并且忽略了上册 § 24 例 1 的惯性离心力), 静水的自由表面处处垂直于重力, 应当是球面。人们常说的海平面实际上是“海球面”。在很长的直隧道中, 假如有了积水 (图 65 用斜线标明的), 由于水面为球面, 从洞口向隧道里走去, 积水越来越深, 甚至可以到达隧道的顶部。

如果液体所受的体力并不仅仅是重力, 那么, 静止液体的自由表面便不再是水平面或“水球面”。

例 1 水箱绕竖直轴作匀速转动, 角速度为 ω 。试求水箱中自由水面的稳定形状。

解 以水箱作为参考系统。达到稳定后的水面相对于水箱是静止的。取固定于水箱的坐标系, z' 轴沿转动轴竖直向上, 原点在箱底, x' 轴和 y' 轴则在箱的底面上。图 66 描画的是一个竖直剖面即 $x'z'$ 平面。

转动的水箱为非惯性参考系统, 采用这个参考系统, 应当认为水质点除了受重力 mg 之外, 还受到惯性离心力的作用。以 $x'z'$ 剖面而论, 这惯性离心力的大小为 $m\omega^2 x'$ 。两力的合力偏离竖直方向的角

$$\theta = \arctg \frac{m\omega^2 x'}{mg} = \arctg \frac{\omega^2 x'}{g}. \quad (1)$$

水面垂直于这合力, 所以水面的切线偏离水平的 x' 轴的角亦为 θ , 就是说, 其斜率

$$\frac{dz'}{dx'} = \tg \theta = \frac{\omega^2 x'}{g}. \quad (2)$$

(2) 式给出的斜率随 x' 的不同而不同。

这表明, 水面不是平的而是曲的。为得出水面的形状, 需将 (2) 积分一次,

$$z' = \frac{\omega^2}{2g} x'^2 + C. \quad (3)$$

积分常数 C 等于水面最低处的水深, (3) 式是抛物线方程。

以上只研究了竖直剖面, 我们还要令这个剖面绕 z' 轴旋转, 才得到问题的解。这样旋转的结果, 抛物线 (3) 应代之以旋转抛物面

$$z' = \frac{\omega^2}{2g} (x'^2 + y'^2) + C. \quad (4)$$

读者可拿本例与上册习题 4.14 作一比较。

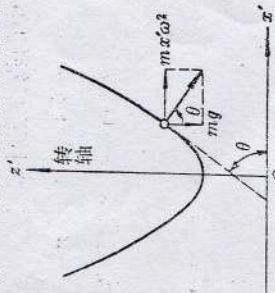


图 66

(3) 不可压缩流体中的静压强分布

流体的平衡条件(37.3)指出, 流体静压强 p 的梯度 ∇p 等于体力密度 f . 这样, 只要知道了流体所受体力密度 f , 就可算出静压强的分布.

先说不可压缩流体.

体力密度 $f(r)$ 是势力, 我们把相应的势能密度记作 $V(r)$, 即

$$f(r) = -\nabla V(r). \quad (37.4)$$

于是, (37.3) 成为

$$\nabla(p + V) = 0.$$

这是说,

$$p(r) = \text{常数} - V(r). \quad (37.5)$$

这就是不可压缩流体中的静压强分布公式, 式中的常数需根据问题中的物理条件确定.

在通常情况下, 流体所受的体力仅仅是重力. 取 z 轴竖直向上, 沿 z 轴的单位矢量记作 k , 则重力密度

$$f = -\rho g k,$$

式中 ρ 是流体的密度. 相应的势能密度

$$V(r) = \rho g z.$$

于是, (37.5) 给出

$$p(r) = \text{常数} - \rho g z. \quad (37.6)$$

如果把原点取在液面, 并把液面上的压强记作 p_0 , 则以 $z=0$ 和 $p=p_0$ 代入(37.6)即定出式中的常数之值为 p_0 . 这样, (37.6)就成为

$$p(r) = p_0 - \rho g z, \quad (37.7)$$

式中 $-z$ 是流体中的深度. 这正是初等物理学中为人们所熟知的公式.

如果流体所受的体力并不仅仅是重力, 那么, 流体中的静压强分布当然不可用(37.7)表示.

例2 试求例1那个水箱中的静压强分布.

解 这里不仅要考虑重力势能, 而且要考虑惯性离心势能. 相应的势能密度是

$$V(r) = \rho g z - \frac{1}{2} \rho (x'^2 + y'^2) \omega^2. \quad (1)$$

于是, (37.5) 给出静压强分布

$$p(r) = \text{常数} - \rho g z + \frac{1}{2} \rho (x'^2 + y'^2) \omega^2. \quad (2)$$

顺便说一, 静止液体的自由表面应是等压面. 由(2)得自由表面的方程

$$\text{常数} = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho (x'^2 + y'^2) \omega^2, \quad (3)$$

与例1的结果相同.

(4) 可压缩流体中的静压强分布

以大气为例. 假定压强只随高度而异, 则方程(37.3)成为

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (37.8)$$

空气是可压缩的, 密度 ρ 随压强 p 而变. 假定大气温度是均匀的(这不尽合理), 由玻义耳-马略特定律得密度 ρ 随压强 p 而变的规律

$$p = \rho \frac{R}{\mu} T, \quad (37.9)$$

式中 μ 为气体分子量, R 为气体常数. 以(37.9)代入(37.8),

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\mu g}{RT} p.$$

分离变数,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz.$$

两边分别积分, 并把 $z=0$ 处的压强记作 p_0 , 则

$$p = p_0 e^{-\rho g z / R T} \quad (37.10)$$

这就是大气压强随高度而变的公式, 叫作气压公式。

一般地说, 流体所受体力密度 $f(r)$ 与流体的密度 ρ 有关。然而, 可压缩流体的密度 ρ 又取决于压强 p , 它们之间的关系式例如 (37.9) 叫作物态方程。研究可压缩流体中的静压强分布, 必须将平衡方程 (37.3) 和物态方程联立起来解算。

对于可压缩流体, 往往不用每单位体积流体所受的力 $f(r)$, 而改用单位质量流体所受的力 $P(r)$, 平衡方程 (37.3) 这时应改写为

$$P - \frac{1}{\rho} \nabla p = 0. \quad (37.11)$$

它仍然应与物态方程联立以解算静压强分布。

§ 38. 理想流体稳恒流动的运动定理

通常把不可压缩的无粘滞流体称为理想流体。这里研究理想流体的稳恒流动, 截取一段细流管, 对它应用质点组运动定理。

(1) 动量定理

考察某个时刻 t 充满细流管 AB 段 (图 67) 的流体, 过了很短

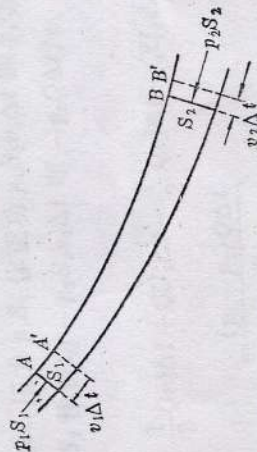


图 67

一段时间 Δt , 这部分流体移到了 $A'B'$ 段。

现在比较 $A'B'$ 段与 AB 段的动量, 以便应用动量定理。由于流动是稳恒的, $A'B$ 段的动量始终不变,

$A'B'$ 段的动量 $- AB$ 段的动量

$$= (A'B + BB') \text{ 段的动量} - (AA' + A'B') \text{ 段的动量} \\ = BB' \text{ 段的动量} - AA' \text{ 段的动量}.$$

所以实际上只需比较 BB' 段与 AA' 段的动量。

细流管横截面上流速的分布可以认为是均匀的, 所以横截面 A 移动到 A' 仍然是横截面, 横截面 B 移动到 B' 仍然是横截面, 从而 BB' 段与 AA' 段都可看作是母线垂直于底面的柱体。让我们分别计算这两个柱体的动量。 BB' 段的长度为 $v_2 \Delta t$, 乘以横截面积 S_2 即得体积 $S_2 v_2 \Delta t$, 从而 BB' 段的质量为 $\rho S_2 v_2 \Delta t$ 。试与 (34.3) 比较, 可以看出这质量正是流量 $Q = \rho S_2 v_2$ 与 Δt 的乘积 $Q \Delta t$ 。再乘以 B 处的流速 v_2 即得 BB' 段的动量 $Q v_2 \Delta t$ 。同理, AA' 段的动量为 $Q v_1 \Delta t$ 。因此, 在 Δt 时间内我们所取的整段细流管中流体动量的增量为 $Q(v_2 - v_1) \Delta t$ 。

按照动量定理, 这段细流管中流体动量的增量应等于这段流体所受外力 F 的冲量 $F \Delta t$,

$$Q(v_2 - v_1) \Delta t = F \Delta t,$$

即

$$F = Q(v_2 - v_1). \quad (38.1)$$

F 的反作用力, 亦即这部分流体给予周围物体的流动反作用力则是

$$F_{\text{反}} = -F = Q(v_1 - v_2). \quad (38.2)$$

例 1 液流以水平流速 v 射向竖直挡板, 试求液流对挡板的正压力。设液流在挡板上并不反弹, 已知液流的横截面积为 S 。

解 应用流动反作用力的公式 (38.2), 但这里只要它的水平分量。这

样,液流对垂直挡板的正压力为

$$F_E = Q(v-0) = \rho S v(v-0) = \rho v^2 S.$$

(2) 柏努利定理

现在比较 $A'B'$ 段与 AB 段的机械能,以便应用功能原理.由于流动是稳恒的, $A'B$ 段的机械能始终不变,所以实际上只需比较 BB' 段与 AA' 段的机械能.

BB' 段的质量前已算出为 $Q\Delta t$, 从而 BB' 段的动能为 $\frac{1}{2}Qv_2^2\Delta t$. 将每单位质量的流体的势能记作 U , 则 BB' 段的势能为 $QU_2\Delta t$. 这样, BB' 段的机械能是 $\frac{1}{2}Qv_2^2\Delta t + QU_2\Delta t$. 同理, AA' 段的机械能是 $\frac{1}{2}Qv_1^2\Delta t + QU_1\Delta t$. 因此, 在 Δt 的时间内, 所截取的一段细流管中流体机械能的增量为

$$\frac{1}{2}Qv_2^2\Delta t + QU_2\Delta t - \frac{1}{2}Qv_1^2\Delta t - QU_1\Delta t.$$

按照功能原理, 这段细流管中流体机械能的增量应等于外力与内力所作功的和. 理想流体是不可压缩的且无粘滞, 内力所作功的和为零. 所以只要计算外力对这段细流管所作功. 在流管侧面, 由于流体无粘滞, 外力垂直于流动方向, 从而不作功. 这样, 只需计算流管的流入端 A 与流出端 B 的外力所作的功.

在流入端 A , 压力 p_1S_1 作正功 $p_1S_1v_1\Delta t$ 即 $p_1Q\Delta t/\rho$. 在流出端 B , 压力 p_2S_2 作负功 $-p_2S_2v_2\Delta t$ 即 $-p_2Q\Delta t/\rho$. 于是, 由功能原理,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}Qv_2^2\Delta t + QU_2\Delta t - \frac{1}{2}Qv_1^2\Delta t - QU_1\Delta t \\ &= \frac{(p_1 - p_2)Q\Delta t}{\rho}. \end{aligned}$$

约去公共因子 $Q\Delta t$, 并遍乘以 ρ , 即得

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho U_2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho U_1 + p_1. \quad (38.3)$$

或以 ρg 遍除各项使它们都具有长度的量纲,

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{U_2}{g} + \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{U_1}{g} + \frac{p_1}{\rho g}. \quad (38.4)$$

公式(38.3)即(38.4)叫作柏努利定理. 它是稳恒流动的理想流体中沿着流线的功能原理.

在通常情况下, 流体所受外力仅仅是重力, 单位质量流体的势能 $U = gz$, 柏努利定理(38.3)和(38.4)分别成为

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1, \quad (38.5)$$

$$\frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g}. \quad (38.6)$$

人们常将 $v^2/2g$, z 和 $p/\rho g$ 分别称作速度头、水头和压力头(头是高度的意思), 柏努利定理(38.6)就可以读作: 在稳恒流动的理想流体中, 沿着同一根流线的各处总头相同.

现在考察柏努利定理(38.5)亦即(38.6)的一些特殊情况.

先说细流管两端截面相等的情况. 稳恒流动的连续性方程在这情况下成为 $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$. 由于不可压缩, $\rho_1 = \rho_2$, 这式又成为

$$v_1 = v_2.$$

于是, 柏努利方程(38.5)两边的 $\rho v_1^2/2$ 和 $\rho v_2^2/2$ 相互抵消,

$$p_1 - p_2 = \rho g(z_2 - z_1). \quad (38.7)$$

这正好相当于静止流体中的压强分布公式(37.7).

再说细流管两端压强相等的情况. 例如在大水槽的侧壁上开一小孔, 孔在水面下 h 处, 水面上方是敞开的[图 68(a)]. 试看图中细流管 AB , 它的两端的压强都等于大气压 p_0 ,

$$p_1 = p_2 = p_0.$$

把水当作理想流体, 应用柏努利定理(38.6). 由于方程两边的 p_1

大,反作用力也就越大。

沿着同一流管,流速大的地方压强小,流速小的地方压强强,这可以用图 69 所示的简单装置加以演示,同一水管在 A 处较粗, B 处较细,由稳恒流动的连续性方程 (34.4) 知道 A 处流速较慢, B 处流速较快。人们可以实地看到 A 和 B 两处竖直侧管中的水面以 A 处较高,这表示 A 处压强较大。

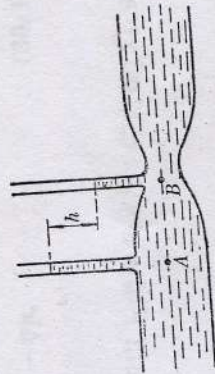


图 69

例 3 图 69 的 A 和 B 两处的截面积分别为 S_1 和 S_2 , 两侧管中的水面高度相差 h , 把管中流体当作理想流体, 试计算 A 和 B 两处的流速, 以及管中流量。

解 由稳恒流动的连续性方程 (34.4) 和柏努利定理 (38.5),

$$\begin{cases} S_1 v_1 = S_2 v_2, \\ \frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2, \end{cases}$$

其中 $p_1 - p_2 = \rho g h$. 从上述代数方程组不难解得

$$v_1 = \frac{S_2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{2gh}, \quad v_2 = \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{2gh}.$$

至于管中流量

$$Q = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2 = \rho \frac{S_1 S_2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{2gh}.$$

方程 (38.11) 还有许多有趣的应用。

飞机在飞行中, 取机翼作为参考系统, 就可以把空气看作是迎面而来的气流。机翼上方的流线比下方的流线密 (图 70), 这表明机翼背上的气流速度大于翼腹下的气流速度, 速度头大的地方压力头小, 速度头小的地方压力头大。这样, 翼腹所受气流压力 (这是向上的) 大于翼背所受气流压力 (这是向下的), 结算下来, 机翼受到向上的力, 这正是使飞机得以腾空的升力。

有一个问题需要说明。翼背 (以图 70 的点 1 为代表) 和翼腹 (以图 70 的点 2 为代表) 并不在同一条细流管上, 怎能应用柏努利定理呢? 原来, 点 1 与远离机翼的点 3 在同一细流管上, 点 2 与远离机翼的点 4 在同一细流管上, 而在点 3 和点 4 的总头显然相等, 因而在点 1 和点 2 的总头也相等。

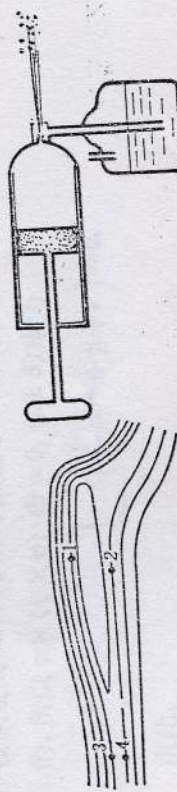


图 70

图 71

又如喷雾器的喷嘴处气流速度特别大, 从而压强特别小, 这就将容器中的药液吸了出来, 吸出的药液随着气流喷射出去而成为雾状 (图 71)。

以上关于飞机升力和喷雾器的定性解释是有缺点的, 这是因为问题所涉及的是气流, 而气体是可压缩的, 但柏努利定理 (38.5) 即 (38.6) 却是在不可压缩的条件下导出的。不过, 只要流速远远小于气体中扰动的传播速度 (即声速), 则可压缩性所引起的误差并不大。

§ 39. 无粘滞流体动力学

(1) 欧勒方程

§ 37 导出了流体的平衡方程, 推导的方法是先计算作用在各个小部分上的合力, 然后令合力为零。在此基础上, 本节推导无粘滞流体的动力学方程, 就只要令 § 37 算出的合力等于各该小部分的质量与加速度的乘积就行了。这样, 由 (37.3) 就得到无粘滞流

体动力学方程

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \nabla p, \quad (39.1)$$

式中 $\mathbf{f}$ 是流体所受体力密度。

因为我们研究的是速度场, 所以上式中的 d/dt 应当按 (34.9)

加以改写,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = \mathbf{f}. \quad (39.2)$$

不难验证

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (39.3)$$

于是, (39.2) 又可改写为

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \rho \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \rho \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla p = \mathbf{f}. \quad (39.4)$$

这就叫作流体力学的欧勒方程。

欧勒方程涉及五个变量—— $\mathbf{v}$, p , ρ , t , $\mathbf{f}$, 所以欧勒方程 (39.4) 还需要补充以连续性方程和物态方程, 才构成流体力学的完全方程组。

欧勒方程为非线性的。电磁学中的麦克斯韦方程组看来好象比欧勒方程复杂, 但麦克斯韦方程组是线性的, 所以实际上欧勒方程解起来比较更难。

(2) 欧勒方程的第一次积分

现在研究欧勒方程在几个特殊情况下的第一次积分。

沿流线的积分 设流体是不可压缩的 (ρ 为常数), 流动是稳恒的 ($\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$), 体力密度 $\mathbf{f}$ 是有势的 ($\mathbf{f} = -\nabla V$, 这 V 是势能密度)。欧勒方程 (39.4) 这时成为

$$-\rho \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + V \right) = 0.$$

沿某一流线积分,

$$-\rho \int_{\text{流线}} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\text{流线}} \nabla \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + V \right) \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (39.5)$$

按照定义, $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ 垂直于 $\mathbf{v}$, 亦即垂直于流线, 而 $d\mathbf{r}$ 是沿流线的, 所以 $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} = 0$, (39.5) 成为

$$\int_{\text{流线}} d \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + V \right) = 0.$$

由此,

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + V = \text{常数 (沿流线)}.$$

或者, 不用势能密度 V , 改用每单位质量的流体的势能 U , 则上式写成

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho U = \text{常数 (沿流线)}. \quad (39.6)$$

这正是柏努利定理 (38.3)。

注意, 柏努利定理 (39.6) 里的常数对于不同的流线可以是不同的。

在历史上, 柏努利定理的发表 (1738 年) 早于欧勒方程 (1755 年), 所以它并不是作为欧勒方程的第一次积分导出的, 而是如 § 38 所示是作为功能原理沿流线导出的。

无旋的稳恒流动 设流体是不可压缩的 (ρ 为常数), 流动是稳恒的 ($\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$) 而且无旋 ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$), 体力密度是有势的 ($\mathbf{f} = -\nabla V = -\rho \nabla U$)。欧勒方程 (39.4) 在这情况下成为

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho U \right) = 0.$$

由此,

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho U = \text{常数}. \quad (39.7)$$

这也是柏努利定理,但式中的常数在整个流体中是同一的,并不随流线而异。

无旋的非稳恒流动 设流体是不可压缩的(ρ 为常数),流动并非稳恒的($\partial v/\partial t \neq 0$)但是无旋($\nabla \times \omega = 0$),体力密度是有势的($f = -\nabla V = -\rho \nabla U$). (35.18)给出无旋流动的速度势 φ ,而

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi.$$

在这种情况下,欧勒方程(39.4)成为

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + \rho \nabla \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right] + \nabla p + \rho \nabla U = 0,$$

即

$$\nabla \left[\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho (\nabla \varphi)^2 + p + \rho U \right] = 0.$$

由此,

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho (\nabla \varphi)^2 + p + \rho U = f(t). \quad (39.8)$$

这是柏努利定理在非稳恒情况下的推广,有的书中称为压力方程,它的解称为压力积分即柏努利积分。右边的 $f(t)$ 在整个流体中是同一的,但时间而变。

(3) 涡旋动力学

关于涡旋动力学,这里要证明开耳芬环流定理。按定义(35.12),环流量

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

今取 C 为随流体漂移的闭合曲线,并计算 Γ 的变化率

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} + \oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} (d\mathbf{r}). \quad (39.9)$$

(39.9)右边第二项

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} (d\mathbf{r}) &= \oint_C \mathbf{v} \cdot d \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \oint_C dv^2 \\ &= \Delta \left(\frac{1}{2} v^2 \right). \end{aligned}$$

这里 C 是闭合曲线,沿 C 循行一周回到原处, $v^2/2$ 的增量当然是零。

再看(39.9)右边第一项。设 f 是有势的, $f = -\nabla V = -\rho \nabla U$, 则由欧勒方程(39.1),

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} p + U \right),$$

从而

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} &= - \oint_C \nabla \left(\frac{1}{\rho} p + U \right) \cdot d\mathbf{r} = - \oint_C d \left(\frac{1}{\rho} p + U \right) \\ &= - \Delta \left(\frac{1}{\rho} p + U \right). \end{aligned}$$

沿 C 循行一周回到原处, $p/\rho + U$ 所获得的增量当然也是零。

于是, (39.9)给出

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \quad (39.10)$$

(35.15)指出环流量 Γ 与表示涡旋强度的 ω 是紧密联系的。这样, (39.10)是说涡旋不能产生或消灭,它随着流体的质点一同漂移。

(4) 绕流对物体的作用力

流体在其流动途中遇到物体,从物体两侧绕过而继续流动,这叫作绕流。

定性解释飞机升力的图70中,描画的就是一种绕流。图中沿机翼剖面周界的环流量

$$\Gamma = \oint_{\text{周界}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \neq 0.$$

这是很关键的。如果环流量 $\Gamma = 0$, 则升力将等于零。

其实, 理想流体的稳恒平移流绕过物体时, 只要绕流是无旋的, 则绕流对物体的作用力 R 就是零。证明如下。

作一个半径 a 很大的球面 S 包围着物体, 球面上每一点距离物体都很远。我们把这称作控制面。控制面与物体之间那部分流体的动量 K 的时间变化率 dK/dt 应等于物体对流体的反作用力 $-R$ 以及控制面外的流体对这部分流体的作用力 $\iint_S p(-n) dS$ 的

合力,

$$\frac{dK}{dt} = -R - \iint_S p n dS,$$

即

$$R = -\frac{dK}{dt} - \iint_S p n dS. \quad (39.11)$$

实体变化率 dK/dt 为当地变化率 $\partial K/\partial t$ 与通过控制面向里传输动量的速率之和,

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} - \iint_S \rho v(v \cdot dS).$$

对于稳恒流动, 当地变化率 $\partial K/\partial t = 0$, 因而

$$\frac{dK}{dt} = -\iint_S \rho v(v \cdot dS). \quad (39.12)$$

把远离物体处的流速记作 v_0 , 以 v_0 的指向作为球坐标系的极轴, 用球坐标系计算 (39.12) 中的积分,

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= -\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho v_0 (v_0 \cos \theta \alpha^2 \sin \theta d\theta d\varphi) \\ &= -\rho v_0 v_0 \alpha^2 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0. \end{aligned} \quad (39.13)$$

再看 (39.11) 右边的第二项, 对于无旋稳恒流动, 由柏努利定

理 (39.7), 并假定了不存在体力密度, 因而没有势能 U , 得

$$p = \text{常数} - \frac{1}{2} \rho v^2.$$

于是,

$$\begin{aligned} \iint_S p n dS &= \iint_S \left(\text{常数} - \frac{1}{2} \rho v^2 \right) n dS \\ &= \left(\text{常数} - \frac{1}{2} \rho v_0^2 \right) \iint_S n dS = 0. \end{aligned} \quad (39.14)$$

以 (39.13) 和 (39.14) 代入 (39.11) 就证明了绕流对物体的作用力 R 为零。

这里 $R=0$ 是说绕流对物体不仅没有“升力”, 就连迎面阻力也没有。这与实验事实矛盾。它指出“理想流体”这个模型只在一定范围里适用。在绕流的情况下, 物体后面有“尾流”, 粘性使得尾流中形成一连串涡流 (图 72 表示在实际流体中的片状物), 这就



图 72

导致阻力。其次,即使物体是流线形的,后面不存在尾流和涡流,粘滞性也直接导致阻力。这是因为紧靠物体的流体粘附在物体上,这部分流体与其余部分之间就存在内摩擦。

(5) 欧勒方程的线性近似

这里研究小的扰动在流体中的传播,或者具体地说,声振动在流体中的传播。

在这种情况下,必须考虑流体的可压缩性,即流体密度 ρ 随压强 p 的变化。不过,既然说的是小振动,密度的变化 $\rho - \rho_0$ (下标零表示相应的平衡值)和流速 v 都是小量。如果略去二阶小量,欧勒方程(39.4)成为

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p = f.$$

这是欧勒方程的线性近似。研究声振动的传播时,不妨认为 $f = 0$ 。于是,

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p = 0. \quad (39.15)$$

在同样的近似下,连续性方程(35.26)成为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot v = 0. \quad (39.16)$$

我们要从(39.15)和(39.16)消去 v 或消去 ρ 。为此,先将(39.15)中的 ∇p 加以改写,

$$\nabla p = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \nabla \rho,$$

其中 $(dp/d\rho)_0$ 可从物态方程 $\rho = \rho(p)$ 算出。这样一来,(39.15)成为

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \nabla \rho = 0. \quad (39.17)$$

为从(39.16)和(39.17)消去 v ,拿(39.16)对 t 微分

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

以(39.17)的 $\partial v / \partial t$ 代入上式,

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \nabla^2 \rho = 0. \quad (39.18)$$

这是著名的波动方程,方程中的系数 $(dp/d\rho)_0$ 是波速的平方。

以空气为例,把声振动的传播看作绝热过程,则物态方程是

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma,$$

其中 γ 是定压比热与定容比热之比,约为 1.4。于是,

$$\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}.$$

在标准状况下,

$$\begin{aligned} p_0 &= 1.012 \times 10^5 \text{ 牛顿/米}^2, \\ \rho_0 &= 1.293 \times 10^{-3} \text{ 千克/厘米}^3 \\ &= 1.293 \text{ 千克/米}^3, \end{aligned}$$

从而

$$\text{声速} = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{1.4 \frac{10.12 \times 10^4}{1.293}} = 332 \frac{\text{米}}{\text{秒}},$$

与实验值相符。

§ 40. 粘滞流体

(1) 粘滞系数

实际的流体或多或少具有粘滞性即内摩擦。

比如,流体沿 x 方向流动,即只有 $v_x \neq 0$,而 $v_y = 0$ 和 $v_z = 0$,不过流速并不均匀, v_x 随 y 而异, $v_x = v_x(y)$,换句话说,在垂直于 y 轴的各层之间有相对滑动,于是各层之间就有摩擦力作用。可以假定,各层之间每单位面积上正 y 一方对负 y 一方的摩擦力 p_{12}

正比于速度梯度 dw_x/dy ,

$$p_{12} = \eta \frac{dw_x}{dy} \quad (40.1)$$

比例常数 η 叫作该种流体的粘滞系数。粘滞系数的量纲

$$[\eta] = \frac{[p][y]}{[v]} = \frac{[F]L^{-2}L}{LT^{-1}} = \frac{(MLT^{-2})L^{-2}L}{LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

在国际单位制中,粘滞系数的单位是千克/米·秒,这有一个专门的名称:帕斯卡·秒。(帕斯卡是压强的单位,即牛顿/米²。)

液体的粘滞系数为 10^{-3} 到 10^0 帕斯卡·秒的数量级,气体的粘滞系数为 10^{-5} 帕斯卡·秒的数量级。粘滞系数与流体的温度有很密切的关系。随着温度的升高,液体的粘滞系数减小,气体的粘滞系数增大。

温度 0°C 的粘滞系数表

液体	η (帕斯卡·秒)	气体	η (帕斯卡·秒)
水	1.808×10^{-3}	空气	1.733×10^{-5}
酒精	1.770×10^{-3}	氢气	0.857×10^{-5}
苯	0.902×10^{-3}	氮气	1.891×10^{-5}

(2) 直圆管的流量公式

试研究直圆管中不可压缩粘滞流体的稳恒流动。

粘滞流体在管中的流速不是均匀分布的。流体粘附于管壁,那里流速为零;而在管轴上,流速较快。这样,管中各处流速 v 取决于该处与管轴的距离 r , r 越大的地方流速越小。这就是说,直圆管中的流体好像划分为许许多多一层套一层的空心圆柱体,从里向外,这些空心圆柱体的流动依次滞后。依次滞后的圆柱体之间有摩擦力作用。因而,为了维持圆管中的稳恒流动,需要在管的两端加上压强差 $p_1 - p_2$ 。

先求流速 v 与距离 r 的函数关系。从许许多多空心圆柱体中取一个作为代表,它的内半径为 r , 外半径为 $r + dr$ (图 73)。把圆管的长度记作 l 。这空心圆柱体的内侧面面积为 $2\pi rl$, 设流体自左向右流动,则在这面积上受到里面流体的摩擦力为

$$\left(\eta \left| \frac{dv}{dr} \right| 2\pi rl \right) \Big|_r,$$

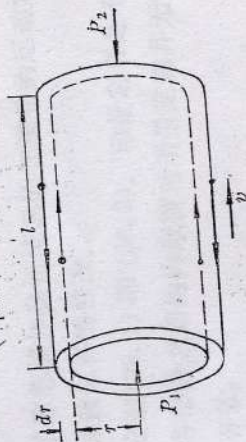


图 73

空心圆柱体的外侧面面积上则受到外面的流体的摩擦力为

$$-\left(\eta \left| \frac{dv}{dr} \right| 2\pi rl \right) \Big|_{r+dr},$$

注意 dv/dr 是负的,所以两者的合力是

$$\begin{aligned} & \left(\eta \frac{dv}{dr} 2\pi rl \right) \Big|_r - \left(\eta \frac{dv}{dr} 2\pi rl \right) \Big|_{r+dr} \\ &= \frac{d}{dr} \left(\eta \frac{dv}{dr} 2\pi rl \right) dr = 2\pi \eta l \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) dr. \end{aligned}$$

上面得出的合力是负的,它抵制流体的流动。前已指出,管的两端有压强差 $p_1 - p_2$ 。这空心圆柱体的横截面积为 $2\pi r dr$, 从而两端压力差为 $(p_1 - p_2) 2\pi r dr$ 。这压力差正好与摩擦力的合力平衡,流体才得以作稳恒流动,

$$(p_1 - p_2) 2\pi r dr + 2\pi \eta l \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) dr = 0.$$

即

$$\frac{p_1 - p_2}{l} + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 0. \quad (40.2)$$

将上式遍乘以 r , 并积分一次, 即得

$$\frac{p_1 - p_2}{2l} r^2 + \eta r \frac{dv}{dr} = C_1 \quad (40.3)$$

考虑到在管壁上 ($r=a$) 流速最大 ($dv/dr=0$), 积分常数 C_1 可确定为零。将 (40.3) 遍除以 r , 并积分一次, 即得

$$\frac{p_1 - p_2}{4l} r^2 + \eta v = C_2 \quad (40.4)$$

考虑到在管壁上 ($r=a$, a 是圆管的半径) 流速为零 ($v=0$), 积分常数 C_2 可确定为

$$C_2 = \frac{p_1 - p_2}{4l} a^2$$

于是, (40.4) 给出流速 v 作为 r 的函数

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} (a^2 - r^2) \quad (40.5)$$

求出了流速 $v(r)$, 流量 Q 就容易计算了。通过图 73 所示空心圆柱体的流量按照 (34.3) 应是 $\rho v 2\pi r dr$, 而通过整个圆管的流量就应是

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^a \rho v 2\pi r dr = \frac{2\pi\rho}{4l\eta} (p_1 - p_2) \int_0^a (a^2 - r^2) r dr \\ &= \frac{\pi\rho a^4}{8l\eta} (p_1 - p_2) \end{aligned} \quad (40.6)$$

这叫作泊肃叶公式。它给出不可压缩粘滞流体在压强差 $p_1 - p_2$ 作用下通过直圆管的稳恒流动的流量 Q 。

从另一角度来看, 粘滞流体通过管子时所受到的摩擦力相当于一个阻止流动的压强差, 这叫作管阻。外加压强差 $p_1 - p_2$ 则是用来克服管阻, 使流体得以作稳恒流动。因此, 泊肃叶公式也可说是直圆管对不可压缩粘滞流体的管阻 $p_1 - p_2$ 与流量 Q 的关系。

作为推导泊肃叶公式的出发点, 我们认为管中的流动是一层套一层的。这样的流动叫作层流。但如管子两端压强差 $p_1 - p_2$ 太

大, 或者说, 管中流量 Q 太大, 超过某一定度, 流体不再作层流, 各处流速不再平行于管轴而是紊乱的, 这样的流动叫作湍流。发生湍流时, 管阻大大增加, 泊肃叶公式不再适用。

(3) 运动定理

§38 研究了理想流体稳恒流动的细流管的运动定理。这里讨论一下粘滞性导致怎样的修改。

先说动量定理 (38.1) 即 (38.2)。动量定理是不考虑内力的, 所以粘滞流体各部分之间的内摩擦对动量定理并无影响, (38.1)

即 (38.2) 保持有效,

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1), \quad \mathbf{F}_R = Q(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \quad (40.7)$$

不过, (40.7) 里的 $\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{F}_R$ 应包括流体与周围物体之间的粘滞阻力。

再说柏努利定理 (38.3) 即 (38.4)。柏努利定理是功能原理, 功能原理需考虑内力所作的功。粘滞流体的内摩擦力所作的功之和是负的, 所以 (38.3) 和 (38.4) 应修改为

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho U_2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho U_1 + p_1 - e, \quad (40.8)$$

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{U_2}{g} + \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{U_1}{g} + \frac{p_1}{\rho g} - h. \quad (40.9)$$

式中 e 是从细流管的 A 端到 B 端 (图 67) 所耗失的能量密度, h 则是总头的耗失, 叫作耗失头。

(4) 纳维尔-斯托克斯方程

现在探讨粘滞流体的动力学方程。

(40.1) 指出, 在粘滞流体中, 除了流体动力学压强即标量 p 之外, 还有一个粘滞胁强张量 p_{ik} , 如 (40.1) 这个特例所表明, 粘滞胁强张量应与胁变速率有关。一般可仿照弹性体的胁强与胁变关

系(31.12),假定粘滞膨胀量为

$$p_{ik} = \theta(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta_{ik} + 2\eta\dot{e}_{ik}, \quad (40.10)$$

其中 θ 是第二粘滞系数, δ_{ik} 是克朗内克记号

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i=k), \\ 0 & (i \neq k), \end{cases} \quad (40.11)$$

$\dot{e}_{ik}$ 则是(35.3)和(35.5)所定义的应变速率。

对于不可压缩的粘滞流体, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, (40.10)成为

$$p_{ik} = 2\eta\dot{e}_{ik}. \quad (40.12)$$

设只有 $\dot{e}_{12} = \dot{e}_{21} \neq 0$, 其他的 $\dot{e}_{ik}$ 都为零, 则(40.12)归结为(40.1).

这样,在粘滞流体中,完全的膨胀张量是 $-p\delta_{ik} + p_{ik}$, 即

$$\begin{bmatrix} p_{11}-p & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-p & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-p \end{bmatrix}. \quad (40.13)$$

仿照(33.1),得到粘滞流体的动力学基本方程

$$\begin{cases} \rho \frac{dv_x}{dt} = f_x + \frac{\partial}{\partial x}(p_{11}-p) + \frac{\partial}{\partial y}p_{12} + \frac{\partial}{\partial z}p_{13}, \\ \rho \frac{dv_y}{dt} = f_y + \frac{\partial}{\partial x}p_{21} + \frac{\partial}{\partial y}(p_{22}-p) + \frac{\partial}{\partial z}p_{23}, \\ \rho \frac{dv_z}{dt} = f_z + \frac{\partial}{\partial x}p_{31} + \frac{\partial}{\partial y}p_{32} + \frac{\partial}{\partial z}(p_{33}-p). \end{cases} \quad (40.14)$$

按照(40.10)将 p_{ik} 用 $\dot{e}_{ik}$ 表出, 又按定义(35.3)和(35.5)将 $\dot{e}_{ik}$ 用 $\mathbf{v}$ 表出, 一般 η 和 θ 随温度变化较快, 但若设 θ 与 η 可以看作常数时, 则(40.14)就成为

$$\begin{cases} \rho \frac{dv_x}{dt} = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 v_x + (\eta + \theta) \frac{\partial}{\partial x}(\nabla \cdot \mathbf{v}), \\ \rho \frac{dv_y}{dt} = f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \nabla^2 v_y + (\eta + \theta) \frac{\partial}{\partial y}(\nabla \cdot \mathbf{v}), \\ \rho \frac{dv_z}{dt} = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \nabla^2 v_z + (\eta + \theta) \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \cdot \mathbf{v}). \end{cases} \quad (40.15)$$

这合并为矢量式

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \theta) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (40.16)$$

粘滞流体的动力学方程(40.16)叫作纳维尔-斯托克斯方程。

因为我们研究的是速度场, 所以纳维尔-斯托克斯方程(40.16)中的 d/dt 应当按(34.9)加以改写,

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \theta) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (40.17)$$

或者, 利用(39.3)还可以进一步改写,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \rho \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \rho \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \\ = \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \theta) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (40.18)$$

粘滞流体的纳维尔-斯托克斯方程(40.18)与无粘滞流体的欧勒方程(39.4)比较, 方程(40.18)右边多出 $\eta \nabla^2 \mathbf{v}$ 和 $(\eta + \theta) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$ 两项。纳维尔-斯托克斯方程解起来更难一些。

不过, 对于不可压缩粘滞流体在直圆管中的稳恒流动, 纳维尔-斯托克斯方程的求解倒是不难的。事实上, 由于 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ (不可压缩) 和 $d\mathbf{v}/dt = 0$ (直管中稳恒流动) 而且体力密度 $\mathbf{f} = 0$, 纳维尔-斯托克斯方程(40.16)成为

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} = 0. \quad (40.19)$$

上式的 ∇p 和 $\mathbf{v}$ 都是沿着管轴的。取圆柱坐标系 r, θ, z , 其中 z 轴就沿着管轴。这样一来, p 是 z 的函数, $\mathbf{v}$ 是 r 的函数, $\nabla^2 \mathbf{v}$ 也沿着管轴, 其大小为

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right). \\ \text{于是, 方程(40.19)成为} \\ -\frac{dp}{dz} + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 0. \end{aligned}$$

这正是(40.2), 由此可解得管中流速分布如(40.5)以及管中流量如泊肃叶公式(40.6).

本节的附录用纳维尔-斯托克斯方程研究球体匀速缓缓通过粘滞流体的情况, 求得小球所受阻力

$$F = 6\pi\eta av_0, \quad (40.20)$$

其中 a 是小球半径, v_0 是小球的速度, 这叫作斯托克斯公式. 斯托克斯公式在一些基本实验中起着很重要的作用, 例如经典的密立根油滴实验(证实电荷有一最小单位即电子电荷)就用到斯托克斯公式.

(5) 雷诺数

关于流动的一些理论问题和工程问题需要进行模拟实验. 在模拟实验中, 不仅几何尺寸比原型缩小了, 就是流速甚至于流体的种类都可以不同于原型. 那么, 在模型与原型之间, 怎样作比较呢? 或者, 换成一般的提法, 两种流动怎样才是流体动力学相似的呢?

为了回答流体动力学相似性这个问题, 应该把纳维尔-斯托克斯方程用无量纲的形式写出. 以不可压缩粘滞流体的稳恒流动为例, 如果体力密度 $f = 0$, 则纳维尔-斯托克斯方程(40.17)成为

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (40.21)$$

在所研究的速度场中取某个特征长度 a_0 和某个特征速度 v_0 . 引入无量纲坐标

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x}{a_0}, & y_1 &= \frac{y}{a_0}, & z_1 &= \frac{z}{a_0}, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} &= a_0 \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y_1} &= a_0 \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z_1} &= a_0 \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

则

$$\nabla_1 \equiv i \frac{\partial}{\partial x_1} + j \frac{\partial}{\partial y_1} + k \frac{\partial}{\partial z_1} = a_0 \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \equiv a_0 \nabla.$$

还引入无量纲速度

$$v_1 = \frac{v}{v_0}.$$

于是, 以 $a_0/\rho v_0^2$ 遍乘(40.21)各项即得

$$(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla_1) \mathbf{v}_1 = -\nabla_1 p_1 + \frac{1}{v_0 a_0 \rho / \eta} \nabla_1^2 \mathbf{v}_1. \quad (40.22)$$

其中

$$p_1 = \frac{p}{\rho v_0^2}$$

是无量纲压强. (40.22)就是无量纲的纳维尔-斯托克斯方程, 其中出现的唯一的参数是

$$\frac{v_0 a_0}{\eta / \rho}.$$

通常把这参数称作雷诺数, 记作 R ,

$$R = \frac{v_0 a_0}{\nu}, \quad (40.23)$$

式中

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (40.24)$$

叫作运动学粘滞系数.

这样, 两种流动, 不仅其尺寸成比例, 而且雷诺数相同, 则它们的无量纲的动力学方程相同, 因而是动力学相似的.

例如, 关于管中流动是层流还是湍流的问题, 就可用雷诺数来判断. 如雷诺数不超过某个临界值, 流动是层流; 否则为湍流. 在管口平直的情况下, 临界雷诺数只有大约 1200. 如将管口作成喇叭形, 临界雷诺数可提高到 20000.

在其他条件相同的情况下, 流体的粘滞系数越大, 则雷诺数越

小,有利于层流;密度越大,则雷诺数越大,有利于形成湍流。事实上,湍流是一种不稳定的流动。当流体质点由于某些原因而获得垂直于原来流速方向的横向分速度时,粘滞性有消除横向分速的趋势,惯性质量则有保持横向分速的趋势,所以前者有利于流动的
稳定,后者不利于稳定。

(6) 边界层

对于不可压缩流体($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$)的无旋流动($\nabla \times \mathbf{v} = 0$),

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = 0.$$

这就是说,粘滞流体的动力学方程(40.18)竟然完全等同于无粘滞性的动力学方程(39.4)!粘滞性不起作用!

说粘滞性不起作用,这话也不完全对。原来,边界条件是有差别的。例如,在静止的边界上,无粘滞流体的法向速度为零,切向速度是任意的,粘滞流体的法向速度和切向速度则都是零。不过,在流体内部,这两种流体的动力学方程相同,可以说粘滞性不起作用。粘滞流体的运动与无粘滞流体的运动相同。而在靠近边界的一层中,流动情况有所不同。我们将这一层称作边界层。从流体内部跨过边界层到达边界上,切向速度就降到零。

粘滞系数小,边界或浸在流体中的物体大,且流速快,则边界层的厚度就小,从而流动的绝大部分是在边界层以外,与无粘滞流动很少差别。例如 § 38 关于飞机升力的定性解释(图 70)就完全按照理想流体来处理,并没有说到粘滞性。

[附] 球体所受粘滞阻力

这里研究半径为 a 的球以匀速 $\mathbf{v}_0$ 缓缓通过不可压缩粘滞流体,并推导球体所受粘滞阻力的斯托克斯公式(40.20)。

这个问题采用球体作为参考系统比较方便。相对于这个参考系统,球是静止的,流体则迎面而来。从球的两侧绕流而继续流动,这就成为绕流问题,

而且这绕流是稳恒流动。在远离球体的地方,流速为 $-\mathbf{v}_0$ 。

我们用纳维尔-斯托克斯方程(40.17)来研究这个绕流问题。由于是稳恒流动, $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$; 由于流体不可压缩, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$; 由于流速缓慢, $\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ 项含有流速的二次幂,与其他各项相比可以忽略。我们还假定作用于流体的体力密度 $\mathbf{f}$ 为零。于是,方程(40.17)简化为

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} = 0. \quad (40.25)$$

对(40.25)的每一项施行散度运算 $\nabla \cdot$, 由于 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ 即得

$$\nabla^2 p = 0. \quad (40.26)$$

这就是说,压强 p 满足拉普拉斯方程。

我们用球坐标系来解拉普拉斯方程(40.26)。关于拉普拉斯方程的球坐标系解法,读者可参看数学物理偏微分方程方面的书籍(例如梁昆森编《数学物理方法》,第二版,人民教育出版社,1978, § 40, § 41 以及第十三章)。

取球心作为球坐标系的极点,通过球心而沿着 $-\mathbf{v}_0$ 的轴作为极轴。这极轴是问题中的对称轴,流体中的压强 p 和流速 $\mathbf{v}$ 都与球坐标 (r, θ, φ) 中的“经度” φ 无关,就是说

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0. \quad (40.27)$$

这个“轴对称”性质还意味着流速 $\mathbf{v}$ 沿 φ 增长方向的分量

$$v_\varphi = 0. \quad (40.28)$$

在远离球体的地方,流速 $\mathbf{v}$ 沿 r 增长方向的分量 v_r 和沿 θ 增长方向的分量 v_θ 分别是

$$v_r|_{r \rightarrow \infty} \sim v_0 \cos \theta, \quad v_\theta|_{r \rightarrow \infty} \sim -v_0 \sin \theta. \quad (40.29)$$

压强 p , 作为拉普拉斯方程(40.26)的解,可用球函数表出。考虑到“轴对称”性质(40.27),这里的球函数只限于 $\cos \theta$ 的勒让德多项式 $P_l(\cos \theta)$, 即

$$p = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta). \quad (40.30)$$

考虑到边界条件(40.29), 其中 $\cos \theta$ 即 $P_1(\cos \theta)$, 不妨揣想在(40.30)中只有 $l=1$ 的一项,即

$$p = A_1 \frac{1}{r^2} \cos \theta. \quad (40.31)$$

现在把(40.31)代入(40.25)去求解 $\mathbf{v}$ 。在轴对称条件(40.28)下,方程

(40.25) 在 r 增长的方向上的分量是

$$\eta \left[\frac{\partial^2 (r^2 v_r)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right] = -\frac{2A_1}{r^3} \cos \theta. \quad (40.32)$$

参照 (40.29), 我们假定

$$v_r = \frac{R_1(r)}{r} \cos \theta,$$

以此代入 (40.32) 得 $R_1(r)$ 的微分方程

$$r^2 \frac{d^2 R_1}{dr^2} + 2r \frac{dR_1}{dr} - 2R_1 = -\frac{2A_1}{\eta},$$

它的通解是

$$R_1(r) = \frac{A_1}{\eta} + Br + \frac{C}{r^2},$$

其中 B 和 C 是积分常数。这样就求出了

$$v_r = \left(\frac{A_1}{\eta r} + B + \frac{C}{r^3} \right) \cos \theta. \quad (40.33)$$

至于 v_θ 则容易从不可压缩条件 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ 求得。事实上, 在球坐标系中, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ 在条件 (40.28) 下的表示式是

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) = 0,$$

即

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) = \left(-\frac{A_1}{\eta r} - 2B + \frac{C}{r^3} \right) \sin \theta \cos \theta. \quad (40.34)$$

参照 (40.29), 我们假定

$$v_\theta = R_2(r) \sin \theta,$$

以此代入 (40.34) 即解得

$$R_2(r) = -\frac{A_1}{2\eta r} - B + \frac{C}{2r^3}.$$

这就求出了

$$v_\theta = \left(-\frac{A_1}{2\eta r} - B + \frac{C}{2r^3} \right) \sin \theta. \quad (40.35)$$

接下来的问题是确定积分常数。以 (40.33) 和 (40.35) 代入边界条件 (40.29) 就定出积分常数 B ,

$$B = v_0.$$

在球面上还有边界条件

$$v_r|_{r=a} = 0, \quad v_\theta|_{r=a} = 0.$$

以 (40.33) 和 (40.35) 代入球面上的边界条件, 得

$$\frac{A_1}{\eta a} + v_0 + \frac{C}{a^3} = 0, \quad -\frac{A_1}{2\eta a} - v_0 + \frac{C}{2a^3} = 0.$$

由此解得积分常数 A_1 和 C ,

$$A_1 = -\frac{3}{2} v_0 \eta a, \quad C = \frac{1}{2} v_0 a^3.$$

到这里, 我们已将绕流问题解出,

$$\begin{cases} v_r = \left(-\frac{3}{2} \frac{a}{r} + 1 + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right) v_0 \cos \theta, \\ v_\theta = \left(\frac{3}{4} \frac{a}{r} - 1 + \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} \right) v_0 \sin \theta, \\ p = -\frac{3}{2} \eta a \frac{1}{r^2} v_0 \cos \theta. \end{cases} \quad (40.36)$$

在球面上,

$$p|_{r=a} = -\frac{3}{2} \eta \frac{1}{a} v_0 \cos \theta.$$

由于轴对称, 球面上的压强分布的合力是沿着 z 轴的阻力

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(-p \cos \theta \right)_{r=a} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= 3\pi \eta a v_0 \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \eta a v_0. \end{aligned} \quad (40.37)$$

我们还需要计算粘滞应力张量在球面上的分布 (参看图 74) 的合力

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (p_{rr} \cos \theta - p_{r\theta} \sin \theta)_{r=a} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= 2\pi a^2 \int_{\theta=0}^{\pi} (p_{rr} \cos \theta - p_{r\theta} \sin \theta)_{r=a} \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (40.38)$$

按照 (40.12),

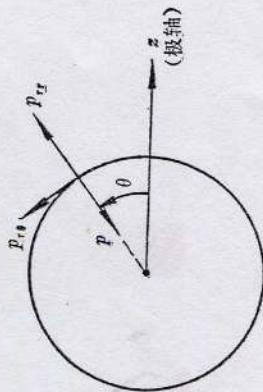


图 74